

Giancarlo Buccella

## *Spigolature di Fisica*

*La gravitazione, il corpo nero, moto viscoso...*

## Sommario

1	Alcuni cenni sulla propagazione degli errori	Pag. 1
2	Moto con forze viscosse	Pag. 35
3	La gravitazione	Pag. 87
4	Analisi della dinamica in campi di forza centrali	Pag. 205
5	Il corpo nero	Pag. 233
6	La trasmissione del calore (tempo di raffreddamento di una birretta)	Pag. 281
7	Bilancio termico terrestre ed effetto serra	Pag. 320
8	Bilancio energetico del corpo umano	Pag. 336
9	Perché in estate fa più caldo che in inverno	Pag. 394
10	Calcolo dell'abbassamento della linea di visuale	Pag. 404
11	Il fenomeno delle maree	Pag. 411
12	Problema delle formiche che si inseguono	Pag. 424

## *Alcuni cenni sulla propagazione degli errori (o incertezze)*

**La misura esatta di una grandezza fisica è un dato teorico sperimentalmente inaccessibile.**

Ogni misura porta con sé inevitabilmente un certa incertezza, che nel caso di una misura singola corrisponde alla sensibilità dello strumento utilizzato per effettuare la misura, cioè alla minima variazione della grandezza che lo strumento riesce a rilevare. Un esempio per tutti è il seguente: se sopra una bilancia poniamo un oggetto di un peso inferiore alla sensibilità minima la lancetta non si sposterà dallo zero, la sensibilità sarà il peso minimo che la bilancia riesce a rilevare.

Facendo, ad esempio, una misura di lunghezza con un metro da sarto, che ha una sensibilità del millimetro, l'incertezza da associare alla misura sarà di 1 mm o se si è particolarmente attenti nella misura ci si potrebbe spingere alla metà della sensibilità ossia 0.5 mm, ma certamente non oltre.

In questa nota useremo come sinonimi le parole incertezza ed errore.

### **Misura diretta**

Nel caso di una misura diretta di una singola grandezza fisica il risultato si scrive così:

$$(x \pm \Delta x) u$$

Dove  $u$  sta per 'unità di misura' e dipende dalla unità di misura adottata per la grandezza misurata, e il  $\Delta x$  rappresenta l'incertezza sulla misura, che in questo caso coincide alla sensibilità dello strumento (o tutt'al più alla sua metà). Per semplicità nel seguito ometteremo di scrivere le unità di misura.

Il valore numerico di  $\Delta x$  definisce il numero di cifre significative con cui ha senso esprimere  $x$ .

Vale la seguente regola:

**la posizione decimale dell'ultima cifra diversa da zero deve essere la stessa sia nel valore della misura ( $x$ ) che nell'incertezza ( $\Delta x$ ).**

Ad esempio, se il valore della misura è 186.77 cm con un'incertezza di 0.3 cm è errato scrivere  $186.77 \pm 0.3$  dato che la posizione della cifra dell'incertezza è sui decimi anche il numero che esprime la misura dovrà fermarsi (cioè avere una cifra diversa da zero) ai decimi, e quindi andrà scritto così  $186.8 \pm 0.3$ , se invece l'incertezza sarebbe 3 allora si dovrebbe scrivere  $187 \pm 3$ , se ancora l'incertezza sarebbe 30 (ossia nelle decine) il risultato della misura dovrà avere cifre diverse da zero fino alle decine, e quindi si avrebbe non  $187 \pm 30$  ma  $190 \pm 30$ .

## Misure ripetute

Per effettuare la misura di una grandezza, abbiamo bisogno di uno strumento di misura. È impossibile ottenere il valore esatto di una grandezza, perché ogni misura è soggetta a tre tipi di imprecisione di cui la prima riguarda solamente il caso della misura singola.

1. la sensibilità dello strumento di misura, cioè la grandezza più piccola che posso misurare.

Esempio: con un normale righello la divisione più piccola corrisponde a 1 mm. Perciò non possiamo misurare lunghezze più piccole di 1 mm e ogni misura ha un'incertezza pari 1 mm (o al più della mezza "tacca", cioè 0.5 mm).

2. l'errore casuale, causato da piccole e imprevedibili variazioni, che aumentano e diminuiscono di poco il risultato della misura.

Esempio: quando cronometriamo una corsa di velocità, la prontezza di riflessi aumenta o diminuisce casualmente, anche se di poco, e questo introduce una variabilità casuale dei risultati che misuriamo.

3. l'errore sistematico è causato da un difetto dello strumento di misura o del metodo utilizzato, e si ripete identico ad ogni misura.

Esempio: un orologio che va troppo piano o una bilancia tarata male modificano sistematicamente le misure.

Nel seguito **non terremo conto dell'errore sistematico** in quanto esso qualora si presenti è in genere facilmente identificabile ed eliminabile da un bravo operatore.

**Al fine di fare misure più accurate è conveniente ripetere l'operazione di misura più volte**, infatti in questo modo si ottiene un valore dell'incertezza più piccolo rispetto a quello ottenuto facendo una sola misura. Facendo N misure di una data grandezza  $x$ , si ottengono N risultati non tutti uguali fra loro, quindi è solo possibile dire che la nostra misura sarà compresa fra il valore massimo e minimo fra quelli ottenuti.

**E' chiaro che nel caso in cui la sensibilità dello strumento maschera l'effetto degli errori casuali otterremo sempre lo stesso valore della misura**, ad esempio se misuriamo la lunghezza di un tavolo con il metro di casa otterremo sempre lo stesso valore.

Quindi facendo N misure otterremo in generale N valori :  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ .

Fra questi valori ci sarà quello massimo  $x_{\max}$  e quello minimo  $x_{\min}$ . Si definisce il valore più probabile (ossia il numero rappresentativo delle n misure, da scrivere come risultato della misura, che indicheremo con il simbolo  $\bar{x}$  ) la media aritmetica dei valori ottenuti associando a questo valore una incertezza data dalla semidispersione  $\Delta x$ .

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_N}{N}$$

$$\Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2}$$

Il risultato risulterà espresso nel seguente modo

$$x = x \pm \Delta x$$

dove  $\Delta x$  viene detto incertezza assoluta (o errore assoluto).

**Regola:** Il valore fornito dall'incertezza deve essere espresso con una sola cifra diversa da zero;

ad esempio se il calcolo ci dà 0.0341 l'incertezza va espresso come 0.03, se invece il risultato è 93.2 si dovrà scrivere 90.

**Eccezione:** se la prima cifra dell'incertezza è 1 (o eventualmente 2) per non essere troppo brutali nell'approssimazione si potrebbe conservare due cifre anziché una soltanto. Ad esempio se  $\Delta x = 0.138$  si potrebbe scrivere 0.14 anziché 0.1.

Oltre alla semidispersione ci sono altre modalità di calcolo per determinare l'errore.

## Errore relativo

Si possono avere misure con lo stesso errore assoluto ma precisione molto diversa. Ad esempio, se misuriamo la lunghezza del pollice della mano (circa 2 cm) e facciamo un errore di 1 cm, abbiamo così una misura molto grossolana. Ma se facciamo lo stesso errore di 1 cm nel misurare l'altezza del Colosseo (circa 50 m), avremo una misura molto più precisa. Eppure, l'errore assoluto è identico. Per avere una indicazione della precisione della misura si introduce l'incertezza relativa definita come rapporto fra l'incertezza ed il valore della misura

$$\Delta_{rel} x = \frac{\Delta x}{x}$$

A volte è utile esprimere tale numero percentualmente e si parla allora di incertezza percentuale:

L'**errore percentuale** è pari all'errore relativo moltiplicato per 100, e si indica con il segno %.

Ad esempio se la lunghezza di un pollice è di 2 cm e l'errore di misura è di 1 cm, l'errore relativo vale

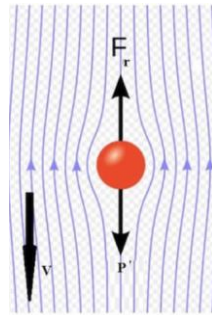
$$\Delta L_{rel} = \frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\% \quad (\text{errore di una parte su 2})$$

Nel caso invece che la stessa incertezza di 1 cm fosse riferita alla misura dell'altezza del Colosseo alto 50 m avremo avuto un errore relativo di:

$$\Delta L_{rel} = \frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{5000} = 0.0002 = 0.2\% \quad (\text{errore di una parte su 5000})$$

La seconda misura è molto più precisa della prima.

# Moto con forze viscose



Il moto di un oggetto all'interno di un fluido, come l'aria o l'acqua, è un fenomeno fisico complesso, governato da una serie di forze che ne determinano la traiettoria e la velocità. Una delle forze più significative in questo contesto è la resistenza del mezzo, o attrito viscoso, una forza che si oppone al moto e la cui intensità aumenta con la velocità del corpo. Questo articolo esplora i diversi modelli matematici utilizzati per descrivere questa forza e le loro applicazioni in vari scenari fisici, dal moto di un grave in un liquido al moto armonico smorzato.

Quando un oggetto si muove all'interno di un fluido, come l'aria o l'acqua, sperimenta una forza di resistenza che si oppone al suo moto, tendendo a ridurre la velocità. Questa forza, nota come resistenza del mezzo o attrito viscoso, aumenta con l'aumentare della velocità del corpo. La sua dipendenza dalla velocità, tuttavia, è complessa e influenzata da numerosi parametri, tra cui le dimensioni geometriche, la forma, le caratteristiche superficiali dell'oggetto e le proprietà del fluido come densità, viscosità e temperatura.

La trattazione di questa forza di resistenza si basa spesso su modelli empirici. Sebbene le relazioni generali tra i parametri possano essere talvolta dedotte da considerazioni dimensionali, i valori numerici specifici devono essere determinati sperimentalmente, ad esempio attraverso test in una galleria del vento. Solo in casi di geometrie molto semplici e condizioni di moto particolari è possibile determinare teoricamente la forza di resistenza.

In generale la forza di attrito viscoso viene descritta mediante due diversi modelli:

- 1) Il primo modello valido in caso di basse velocità (ad esempio una sfera che cade nell'acqua). In questo modello la forza di attrito viscoso aumenta proporzionalmente con la velocità.
- 2) Il secondo modello è invece valido quando si studia il moto di oggetti di grandi dimensioni che si muovono ad elevata velocità (aereo, paracadutista, automobile). In questo modello la forza aumenta con il quadrato della velocità.

Questa resistenza dipende, come già accennato, oltre che dalla velocità, dalla forma e dalle dimensioni dell'oggetto e dalle caratteristiche del fluido (es. densità, viscosità, ecc.).

*Forma* - Per descrivere come influenza il moto la forma del corpo si usa il cosiddetto “Il coefficiente di resistenza aerodinamica” (o coefficiente di penetrazione aerodinamica), esso è un coefficiente adimensionale usato per misurare la resistenza aerodinamica di un corpo in moto in un fluido che tiene conto sia della resistenza di attrito sia della resistenza di forma. Ad esempio per un paracadute vale 1.4 mentre per un'auto 0.3.

*Dimensione* - Considerando che a parità di coefficiente di resistenza aerodinamica, due corpi possono subire una maggiore o minore resistenza aerodinamica semplicemente per una sezione frontale maggiore o minore, ecco che entra in gioco anche la dimensione del corpo ossia più precisamente l'area della sezione del corpo proiettata sul piano perpendicolare del moto.

*Viscosità* – La viscosità di un fluido viene descritta mediante il coefficiente di attrito viscoso **dinamico** ( $\eta$ ) e **cinematico** ( $\nu$ ), essa è una grandezza che misura la propensione di un fluido a generare attrito interno tra i propri strati in movimento; è una caratteristica che dipende solamente dal tipo di fluido e che riguarda esclusivamente i fluidi reali.

L'unità di misura della viscosità più utilizzata nel SI è il poiseuille (PI) ed è definita come

$$P_a \cdot s \quad \text{dove Pa indica il pascal,}$$

mentre nel Sistema CGS si usa il poise (P) definito come

$$1P = 0.1P_a \cdot s$$

Occorre precisare che la viscosità varia con la temperatura e pertanto va specificato a quale valore di essa si riferisce.

Tabella esemplificativa con i valori di viscosità cinematica e dinamica

Liquidi	$\eta$ / mPa*s a 20°C	$\eta$ / mPa*s a 0°C	$\nu$ / mm <sup>2</sup> /s a 20°C
Acqua	1,002	1,792	1,004
Olio d'oliva	80,8		89
Etanolo	1,20	1,78	1,52
Metanolo	0,587	0,820	0,742
Benzolo	0,648	0,91	0,737

Gas a 0°C; 1013 hPa	$\eta$ / $\mu\text{Pa}\cdot\text{s}$	$\nu$ / $\text{mm}^2/\text{s}$
Aria	17,2	13,3
Anidride carbonica	13,7	6,93
Azoto	16,5	13,2
Ossigeno	19,2	13,4

Si noti che l'attrito viscoso è dovuta alla condizione di non slittamento alle pareti. Se vogliamo mettere in rotazione dell'acqua chiusa in una bottiglia, in modo da formare un vortice, quello che facciamo è far roteare la bottiglia. Il moto rotatorio del contenitore viene trasmesso al fluido grazie all'attrito viscoso. Quando il moto rotatorio ha inizio, sono gli strati che aderiscono alle pareti della bottiglia i primi che, sotto l'effetto della forza di attrito, vengono trascinati e messi in rotazione. Questi, a loro volta, trascinano con sé gli strati d'acqua immediatamente più interni che cominciano così a mettersi in moto e via così procedendo sempre verso l'interno, allontanandosi progressivamente dalle pareti del contenitore. Gli strati d'acqua più prossimi all'asse di rotazione si metteranno in moto per ultimi e quelli vicini alle pareti della bottiglia avranno già acquisito una buona velocità. Al termine del processo però tutti gli strati di fluido, indipendentemente dalla loro posizione, avranno raggiunto la medesima velocità angolare.

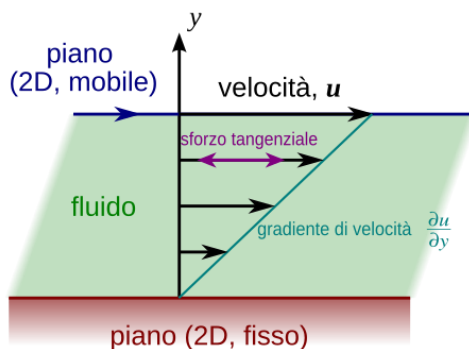
Ricordiamo che in fluidodinamica si introduce in concetto di sforzo tangenziale o sforzo di taglio (shear stress) che rappresenta la forza applicata parallelamente alla superficie per unità di area, che causa lo scorrimento degli strati di fluido ed è definito come rapporto fra la forza tangenziale e l'unità di area:

$$\tau = \frac{F_t}{S}$$

Dove  $F_t$  è la forza tangenziale. Lo sforzo tangenziale essendo un rapporto fra una forza ed un'area è espressa in Pa ( $\text{N}/\text{m}^2$ ).

La relazione locale forza tangenziale in un punto per unità di area è:

$$\tau = \frac{dF_t}{dS}$$



## Legge di Newton della Viscosità

La dinamica dei fluidi reali è caratterizzata dalla presenza di forze di attrito interno tra strati adiacenti in movimento relativo. La relazione fondamentale che quantifica la forza di attrito viscoso per un fluido newtoniano in moto laminare è espressa dalla seguente equazione differenziale:

$$dF = \eta dS \frac{dv}{dn}$$

Dove:

$dF$ : è la forza di attrito viscoso agente tangenzialmente alla superficie di scorrimento.

$dS$ : è l'elemento infinitesimo di superficie di contatto tra due strati di fluido adiacenti.

$\frac{dv}{dn}$ : rappresenta il gradiente di velocità, ovvero la variazione della velocità ( $dv$ ) lungo la direzione ( $n$ ) ortogonale alla superficie di scorrimento.

$\eta$ : è il coefficiente di viscosità dinamica (o assoluta), una costante caratteristica del fluido che ne esprime la resistenza allo scorrimento.

Dividendo entrambi i membri per  $dS$ , si ottiene l'espressione in termini di sforzo di taglio ( $\tau$ ):

$$\tau = \frac{dF}{dS} = \eta \frac{dv}{dn}$$

Applicazione al moto in geometria piana (Flusso di Couette)

Consideriamo il caso semplificato di un fluido compreso tra due lastre piane parallele, di cui una fissa e una in movimento (moto piano di Couette). Assumendo che:

Il profilo di velocità sia lineare, il fluido sia newtoniano, il moto sia stazionario e laminare.

È possibile passare dalla forma differenziale alla forma integrata (macroscopica). Indicando con:

$F$  la forza applicata tangenzialmente alla lamina mobile.

$S$  l'area della superficie della lamina a contatto col fluido.

$v$  la velocità di trascinamento della lamina mobile.

$h$  la distanza tra la lamina mobile e quella fissa (spessore del meato fluido).

Sussiste la seguente relazione:

$$\frac{F}{S} = \eta \frac{v}{h}$$

In questa equazione, il termine  $\eta$  rappresenta la costante di proporzionalità nota come viscosità dinamica.

Analisi Dimensionale

Dalla relazione precedente è possibile ricavare la formula inversa per determinare il coefficiente di viscosità:

# La gravitazione



*Vedere il mondo in un granello di sabbia e il cielo in un fiore di campo,  
tenere l'infinito nel palmo della mano e l'eternità in un'ora. (William Blake)*

Il moto dei corpi celesti ha affascinato l'umanità sin dagli albori della civiltà. Uno dei processi più interessanti nella storia della scienza è quello di come è maturata la nostra comprensione circa il moto dei pianeti.

“Mentre ammiriamo la mente umana, dovremmo prenderci un po' di tempo per *contemplare con soggezione e stupore* una natura capace di seguire con tale completezza e generalità un principio così elegantemente semplice come la legge di gravitazione.” (Richard Feynman)

Racconteremo brevemente la storia della scoperta della legge di gravitazione e discuteremo alcune delle sue conseguenze, i misteri che tale legge comporta e alcuni perfezionamenti della legge apportati da Einstein.

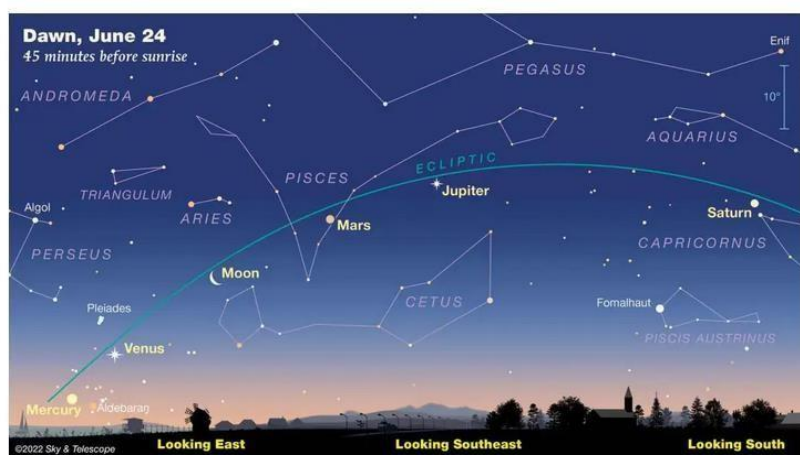
Nella maggior parte dell'antichità, l'idea prevalente era che il Sole girasse intorno alla Terra. Il modello aristotelico-tolemaico poneva la Terra al centro dell'universo (geocentrismo). Si riteneva che il Sole, la Luna e i pianeti ruotassero attorno a essa in orbite circolari perfette. Questa visione era supportata dall'osservazione immediata e dalla filosofia del tempo.

I Greci amavano considerare la Terra come il centro dell'Universo. Essi supponevano che la Terra fosse il centro geometrico e che tutti i “corpi celesti” si muovessero attorno ad essa. I corpi celesti conosciuti a quel tempo erano quelli visibili ad occhio nudo: Luna, Sole, Mercurio, Venere, Marte, Giove e Saturno, con le stelle fisse disposte su di una sfera più esterna.

Ecco una rappresentazione pittorica di questo modello di universo.



Per inciso, mostriamo nella illustrazione seguente un allineamento planetario, non usuale, (avvenuta a giugno 2022) di cinque pianeti disposti in ordine crescente di distanza dal Sole, che mostra come essi seguano la linea azzurra tracciata nel grafico, che rappresenta l'eclittica. Questa linea è la proiezione sulla sfera celeste del piano dell'orbita terrestre. Il fatto che i pianeti si trovino tutti vicini a questa linea dimostra che le loro orbite sono quasi complanari.



La prima ipotesi sul moto planetario fu quella secondo la quale i pianeti (dal greco "planetes" che significa vagabondo, errante) descrivono orbite circolari concentriche aventi la Terra come centro. Tuttavia dalle prime osservazioni ci si accorse che tale modello non si accordava con il moto osservato. L'idea che la Terra ruoti attorno al Sole (eliocentrismo) non nacque improvvisamente con Niccolò Copernico nel 1543. Sebbene il sistema geocentrico (aristotelico-tolemaico) sia stato dominante per quasi due millenni, diversi pensatori fin dall'antichità avevano intuito o ipotizzato che fosse la Terra a muoversi e non il Sole.

### *L'antichità Greca*

- Pitagora e i Pitagorici (VI-V sec. a.C.): Nonostante non avessero un modello eliocentrico perfetto, furono i primi a togliere la Terra dal centro. Filolao di Crotone ipotizzò che la Terra, il Sole e gli altri pianeti ruotassero attorno a un "Fuoco Centrale" (Hestia), che però non era il Sole.
- Eraclide Pontico (IV sec. a.C.): Intuì che la Terra ruotasse attorno al proprio asse da ovest a est. Ipotizzò inoltre che Mercurio e Venere ruotassero attorno al Sole, pur mantenendo il Sole in orbita attorno alla Terra (un sistema ibrido).
- Aristarco di Samo (III sec. a.C.): È considerato il "Copernico dell'antichità". Fu il primo a proporre un modello esplicitamente eliocentrico: sostenne che il Sole e le stelle fossero fissi e che la Terra ruotasse attorno al Sole descrivendo una circonferenza. Le sue idee furono scartate perché contrastavano con la fisica di Aristotele e perché non si riusciva a osservare la "parallasse stellare" (lo spostamento apparente delle stelle dovuto al movimento terrestre).
- Questo modello fu rifiutato con forza da Platone (428 - 348 a.C.) e dal suo allievo Aristotele (384 - 322 a.C.), e fu respinta quattro secoli dopo Aristarco, anche da Claudio Tolomeo, le cui concezioni dominarono incontrastate dalla tarda antichità fino al medioevo.
- Seleuco di Seleucia (II sec. a.C.): Un astronomo babilonese che sostenne la teoria di Aristarco e cercò di dimostrarla razionalmente, legando anche il fenomeno delle maree all'influenza della Luna e al movimento della Terra.

### *Il Medioevo e il Mondo Islamico*

Sebbene il modello tolemaico fosse lo standard, molti astronomi misero in discussione i suoi calcoli matematici, preparando il terreno per Copernico.

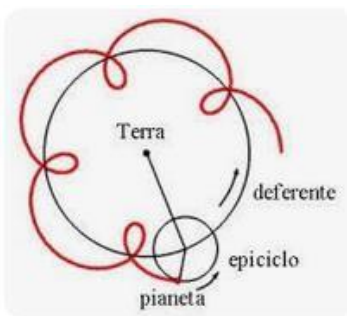
- Al-Sijzi (X secolo): Un astronomo persiano che costruì un astrolabio basato sulla convinzione che fosse la Terra a muoversi e non il cielo.
- La Scuola di Maragheh (Nasir al-Din al-Tusi e Ibn al-Shatir, XIII-XIV sec.): Pur rimanendo tecnicamente geocentrici, questi astronomi arabi svilupparono modelli matematici (come la "coppia di Tusi") che eliminavano alcune incongruenze di Tolomeo. Copernico utilizzò quasi certamente i loro stessi teoremi matematici per il suo sistema.
- Nicole Oresme (XIV secolo): Un vescovo e scienziato francese che discusse la possibilità della rotazione diurna della Terra. Concluse che, dal punto di vista puramente razionale, non era possibile dimostrare che fosse il cielo a muoversi e non la Terra.

### Il Rinascimento (Prima di Copernico)

- Nicola Cusano (XV secolo): Nel suo trattato *La dotta ignoranza* (1440), sostenne che l'universo è infinito e non ha un centro fisso. Affermò che la Terra non è immobile, ma è una "stella nobile" che si muove nello spazio, influenzando profondamente il pensiero filosofico che portò al superamento del geocentrismo.
- Leonardo da Vinci (XV-XVI secolo): In alcuni suoi appunti scrisse "Il Sole non si muove", mostrando di avere dubbi sulla cosmologia tradizionale, sebbene non sviluppò mai una teoria astronomica completa.

### La teoria degli epicicli

- Fu Tolomeo di Alessandria (II secolo d.C.) che sviluppò la teoria degli epicicli al fine di tener conto delle osservazioni. Nel caso più semplice si supposeva che il pianeta descrivesse con moto uniforme una circonferenza chiamata *epiciclo*. Il centro dell'epiciclo, a sua volta, si muoveva su una circonferenza più grande, concentrica con la Terra, chiamata *deferente*. La traiettoria risultante del pianeta è quindi un'epicicloide (vedi figura seguente).



- Questa descrizione sopravvisse fino al XVI secolo, quando Niccolò Copernico (1473 – 1543) sviluppò un metodo differente. Egli andava cercando una soluzione più semplice, e propose quindi di descrivere il moto non centrato sulla Terra ma sul Sole, tale modello, detto eliocentrico, non era nuovo, fu infatti proposto, come già detto, da Aristarco di Samo attorno al III secolo a.C. Inoltre Aristarco concordava con Eraclide Pontico nell'attribuire alla Terra anche un moto di rotazione diurna attorno ad un asse inclinato rispetto al piano dell'orbita intorno al Sole, giustificando così l'esistenza delle stagioni.
- Il sistema copernicano può sintetizzarsi in sette assunti, così come dal medesimo autore enunciati nel compendio *De revolutionibus orbium coelestium* (Sulle rivoluzioni delle sfere celesti) ritrovato e pubblicato nel 1878. Steso tra il 1507 e il 1512, nel "*Nicolai Copernici de hypothesibus motuum coelestium a se constitutis commentariolus*", Copernico presentò le sette *petitiones* (cioè i sette postulati della teoria) che dovevano dare vita a una nuova astronomia:
  1. Non esiste un solo centro di tutti i cerchi o sfere celesti: Copernico nega che tutti i corpi

celesti ruotino attorno a un unico punto (la Terra), rompendo l'unità del sistema aristotelico-tolomaico.

2. Il centro della Terra non è il centro dell'universo: il centro della Terra è solo il centro di gravità e della sfera lunare, non dell'intero cosmo.

3. Tutte le sfere ruotano attorno al Sole: il Sole è il centro dell'universo (o quanto meno si trova vicino al centro del sistema planetario).

4. La distanza tra la Terra e il Sole è infinitesima rispetto alla distanza delle stelle fisse: questo postulato serve a spiegare perché non si osserva la parallasse stellare (lo spostamento apparente delle stelle) nonostante il movimento della Terra: le stelle sono semplicemente troppo lontane.

5. Qualunque movimento appaia nel firmamento appartiene alla Terra: la rotazione quotidiana del cielo non è reale, ma è dovuta alla rotazione della Terra sul proprio asse.

6. I movimenti del Sole sono apparenti e dipendono dal moto della Terra: il Sole non si muove attorno alla Terra; è la Terra che compie una rivoluzione annuale attorno al Sole, come ogni altro pianeta.

7. I moti retrogradi dei pianeti sono solo apparenze: il fatto che i pianeti (come Marte o Giove) sembrino a volte fermarsi o tornare indietro nel cielo è un'illusione ottica causata dal movimento della Terra, che "sorpassa" o viene "sorpassata" dagli altri pianeti nelle loro orbite.

Queste asserzioni rappresentavano l'esatto opposto di quanto affermava la teoria geocentrica, allora comunemente accettata. Copernico fu molto attento a non assumere atteggiamenti rivoluzionari, né con la sua condotta di vita, né nelle sue opere. Egli costruì una nuova cosmologia partendo dagli stessi dati dell'astronomia tolemaica e rimanendo ancorato ad alcune tesi fondamentali dell'aristotelismo:

1) perfetta sfericità e perfetta finitezza dell'Universo;

2) immobilità del Sole data dalla sua natura divina;

3) centralità del Sole dovuta a migliore posizione da cui "può illuminare ogni cosa simultaneamente".

La presunta maggiore semplicità e armonia del sistema (argomenti con cui Copernico e il discepolo Giorgio Gioacchino Retico difendevano la teoria) era però più apparente che reale. Per non contraddire le osservazioni Copernico fu costretto a non fare coincidere il centro dell'Universo con il Sole, ma con il centro dell'orbita terrestre; dovette reintrodurre epicicli ed eccentrici, come fece a suo tempo Tolomeo; dovette attribuire alla Terra, oltre al moto di rivoluzione attorno al Sole e a quello di rotazione attorno al proprio asse, un terzo moto (*declinationis motus*), per rendere conto dell'invariabilità dell'asse terrestre rispetto alla sfera delle stelle fisse.

La trattazione svolta finora si basava sull'assunto iniziale che il centro di massa del sistema dei due corpi coincidesse con il centro del corpo massivo (centro della forza), rimuovendo tale approssimazione proponiamo una trattazione rigorosa del problema dei due corpi.

---

## FORZE CENTRALI

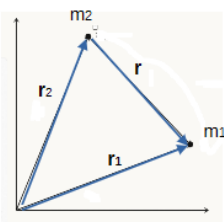
### **Introduzione**

Fu il fascino di Newton per il moto planetario che lo portò a formulare le sue leggi del moto e la legge di gravitazione universale. Il suo successo nello spiegare le leggi empiriche di Keplero sul moto planetario fu un argomento schiacciante a favore della nuova meccanica e segnò l'inizio della moderna fisica matematica. Il moto planetario e il problema più generale del moto sotto una forza centrale continuano a svolgere un ruolo importante in molti rami della fisica e compaiono in argomenti come lo scattering di particelle, la struttura atomica e la navigazione spaziale.

In questo capitolo applichiamo la fisica newtoniana al problema generale del moto sotto forze centrali. Inizieremo esaminando alcune caratteristiche generali di un sistema di due particelle che interagiscono con una forza centrale  $f(r)\hat{r}$ , dove  $f(r)$  è una funzione qualsiasi della distanza  $r$  tra le particelle e  $\hat{r}$  è un vettore unitario lungo la linea dei centri. Dopo aver effettuato un semplice cambio di coordinate, mostreremo come trovare una soluzione completa utilizzando le leggi di conservazione del momento angolare e dell'energia. Infine, applicheremo questi risultati al caso del moto planetario,  $f(r) \propto 1/r^2$ , e mostreremo come essi predicano le leggi empiriche di Keplero.

### **2 Il moto sotto forze centrali come problema a un corpo**

Consideriamo un sistema isolato composto da due particelle che interagiscono sotto una forza centrale  $f(r)$ . Le masse delle particelle sono  $m_1$  e  $m_2$  e i loro vettori posizione sono  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$ .



Introduciamo il vettore  $\mathbf{r}$ :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

$$r = |\mathbf{r}| = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$$

Il vettore  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  rappresenta la posizione relativa di  $m_1$  rispetto a  $m_2$ .

In altre parole: punta da  $m_2$  verso  $m_1$ , il suo modulo  $|\mathbf{r}|$  è la distanza tra le due masse e descrive "dove si trova  $m_1$  agli occhi di  $m_2$ "

È un concetto fondamentale nel problema dei due corpi: invece di studiare il moto di  $m_1$  e  $m_2$  separatamente in un sistema di riferimento assoluto, si studia il moto relativo tramite questo unico vettore  $\mathbf{r}$ , riducendo il problema a quello di una sola particella di massa ridotta.

Le equazioni del moto sono:

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = f(r) \hat{r} \quad (1a)$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -f(r) \hat{r} \quad (1b)$$

La forza è attrattiva per  $f(r) < 0$  e repulsiva per  $f(r) > 0$ . Le equazioni (2a e b) sono accoppiate da  $\mathbf{r}$ ; il comportamento di  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$  dipende da  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ . Mostriamo che il problema è più facile da gestire se sostituiamo  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$  con  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  e il vettore del centro di massa

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$$

L'equazione del moto per  $\mathbf{R}$  è banale poiché non ci sono forze esterne. L'equazione per  $\mathbf{r}$  risulta essere simile all'equazione del moto di una singola particella e ha una soluzione immediata.

L'equazione del moto per  $\mathbf{R}$  è

$$\ddot{\mathbf{R}} = 0,$$

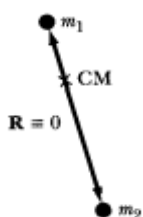
che ha la soluzione semplice

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{V}t.$$

I vettori costanti  $\mathbf{R}_0$  e  $\mathbf{V}$  dipendono dalla scelta del sistema di coordinate e dalle condizioni iniziali. Se siamo abbastanza furbi da prendere l'origine nel centro di massa, ossia scegliere il SR del CDM ponendo l'origine delle coordinate  $O$  esattamente dove si trova il centro di massa, allora

$$\mathbf{R}_0 = 0 \text{ e } \mathbf{V} = 0.$$

In tale SR si ha la seguente situazione.



Per trovare l'equazione del moto per  $\mathbf{r}$ , dividiamo l'Eq. (2a) per  $m_1$  e l'Eq. (2b) per  $m_2$  e sottraiamo. Questo dà

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2 = \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) f(r) \hat{r}$$

oppure

$$\left( \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) (\ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2) = f(r) \hat{r}.$$

Denotando  $m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  con  $\mu$ , la massa ridotta, e usando  $\ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2 = \ddot{\mathbf{r}}$ , abbiamo

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = f(r) \hat{r} \quad (2)$$

L'equazione (4) è identica all'equazione del moto per una particella di massa  $\mu$  sottoposta a una forza  $f(r) \hat{r}$ ; non rimane alcuna traccia del problema a due particelle. Il problema a due particelle è stato trasformato in un problema a una particella. (Sfortunatamente, il metodo non può essere generalizzato. Non c'è modo di ridurre le equazioni del moto per tre o più particelle a equazioni equivalenti a un corpo, e per questo motivo la soluzione esatta del problema dei tre corpi è sconosciuta.)

In questo sistema: l'origine coincide con il centro di massa del sistema, invece di seguire  $m_1$  e  $m_2$  separatamente, si studia il moto di  $\mathbf{R}$  (che descrive il moto del CM nel sistema assoluto) e il moto relativo tramite  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$

Il vantaggio è che si disaccoppiano le equazioni del moto:

il CM si muove come una particella libera di massa totale  $\mathbf{M} = \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2$

il moto relativo si comporta come quello di una particella di massa ridotta  $\mu$  soggetta alla sola forza interna (es. gravitazionale).

Quindi il problema a 6 gradi di libertà (3 coordinate per  $m_1$ , 3 per  $m_2$ ) si riduce a due problemi indipendenti da 3 gradi di libertà ciascuno — una semplificazione enorme!

Il problema ora è trovare  $\mathbf{r}$  in funzione del tempo dall'Eq. (4). Una volta noto  $\mathbf{r}$ , possiamo facilmente trovare  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$  usando le relazioni

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \quad (5a)$$

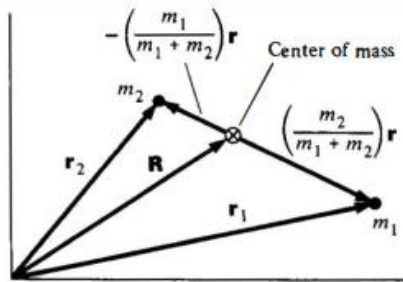
$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (5b)$$

Risolvendo per  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$  si ottiene

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \left( \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) \mathbf{r} \quad (3a)$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \left( \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) \mathbf{r} \quad (3b)$$

$m_2 \mathbf{r}/(m_1 + m_2)$  e  $-m_1 \mathbf{r}/(m_1 + m_2)$  sono i vettori posizione di  $m_1$  e  $m_2$  rispetto al centro di massa, come mostrato nello schema.



La soluzione completa di  $\mu \ddot{\mathbf{r}} = f(r) \hat{\mathbf{r}}$  dipende dalla forma particolare di  $f(r)$ . Tuttavia, alcune proprietà del moto sotto forze centrali rimangono valide in generale, indipendentemente dalla forma di  $f(r)$ , e passeremo ora a indagare queste ultime.

### **Proprietà generali del moto sotto forze centrali**

L'equazione  $\mu \ddot{\mathbf{r}} = f(r) \hat{\mathbf{r}}$  è un'equazione vettoriale e, sebbene sia coinvolta solo una singola particella, ci sono tre componenti da considerare.

Alcune proprietà del moto sotto una forza centrale rimangono valide in generale, indipendentemente dalla forma di  $f(r)$ . I vincoli imposti dalle leggi di conservazione dell'energia e del momento angolare forniscono un passo fondamentale verso la ricerca della soluzione completa. In questa sezione vedremo come utilizzare le leggi di conservazione per identificare alcune caratteristiche universali della soluzione e per ridurre l'equazione vettoriale a un'equazione in una singola variabile scalare. La conservazione della quantità di moto lineare non aggiunge nulla di nuovo, poiché è già incorporata nelle forze uguali e opposte agenti sulle due masse e nel moto uniforme del centro di massa del sistema.

Sebbene in seguito, in questo capitolo, ci concentreremo principalmente sulla forza centrale gravitazionale  $f(r) = -C/r^2$ , le conseguenze delle leggi di conservazione discusse in questa sezione valgono per tutte le forze centrali, qualunque sia la forma di  $f(r)$ .

---

# Analisi della Dinamica in Campi di Forza Centrali

## 1. Introduzione al Modello Fisico

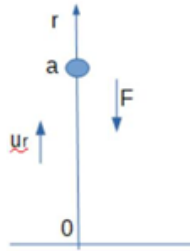
Si consideri una particella di massa  $m$  soggetta a un campo di forza centrale attrattivo espresso dalla relazione:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{k}{r^n} \hat{\mathbf{u}}_r$$

dove  $k$  e  $n$  sono costanti reali positive e  $\hat{\mathbf{u}}_r$  è il versore radiale. Ci proponiamo di analizzare il moto unidimensionale di una particella che parte da ferma da una distanza radiale  $r = a$  e cade verso il centro del campo ( $r = 0$ ).

### Nota sulla Singolarità

Per  $r \rightarrow 0$ , la forza diverge all'infinito. Questo introduce una singolarità matematica che richiede un'analisi attenta della convergenza degli integrali dell'energia e del tempo.



## 2. Calcolo della Velocità: Il caso $n < 1$

Vogliamo determinare sotto quali condizioni la particella raggiunge l'origine con una velocità finita  $v_0$ .

Applicando la seconda legge della dinamica in forma unidimensionale e utilizzando l'identità cinematica

$$a = v \frac{dv}{dr}$$
$$mv \frac{dv}{dr} = -\frac{k}{r^n}$$

Integrando tra lo stato iniziale ( $r = a, v = 0$ ) e lo stato finale ( $r = 0, v = v_0$ ):

$$\int_0^{v_0} m v dv = -\int_a^0 \frac{k}{r^n} dr$$

L'integrale a secondo membro converge se e solo se l'esponente della potenza al denominatore è minore di 1.

Pertanto, la condizione necessaria per avere una velocità finita all'origine è  $n < 1$ .

Risolvendo l'integrale:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \left[ \frac{k}{(n-1)r^{n-1}} \right]_a^0$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2k}{m(1-n)}a^{1-n}} \quad \text{per } n < 1$$

N.B. Se  $n \geq 1$ , il potenziale associato alla forza diverge troppo rapidamente nell'origine, conferendo alla particella un'energia cinetica infinita all'impatto.

Esempio 1. La mela di Newton "semplificata" (Forza Costante,  $n = 0$ )

Immaginiamo che la forza non cambi mai di intensità mentre la mela cade (come accade vicino alla superficie terrestre, dove  $F = mg$ ). In questo caso l'esponente  $n$  è 0.

Parametri:  $n = 0$  e la costante  $k = mg$ .

Calcolo:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2(mg)}{m(1-0)}a^{1-0}} = \sqrt{2ga}$$

Risultato: È la famosissima Formula di Torricelli ( $v = \sqrt{2gh}$ ).

Significato fisico: Se la forza è costante, la velocità cresce proporzionalmente alla radice della distanza. È il "gold standard" della caduta libera.

Esempio 2. La particella "elastica" (Oscillatore Armonico,  $n = -1$ )

Se la forza cresce man mano che ci allontaniamo dal centro (come una molla che tira di più se la allunghi,  $F = -kr$ ), l'esponente  $n$  è -1. Questo è un caso di campo centrale "al contrario".

Parametri:  $n = -1$  e  $k$  è la costante elastica.

Calcolo:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2k}{m(1-(-1))}a^{1-(-1)}} = \sqrt{\frac{2k}{m(2)}a^2} = \sqrt{\frac{k}{m}a^2} = a\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Risultato: Sapendo che la frequenza angolare è  $\omega = \sqrt{k/m}$ , otteniamo  $v_0 = \omega a$ .

## ***Il corpo nero***



### *Modello e descrizione fisica*

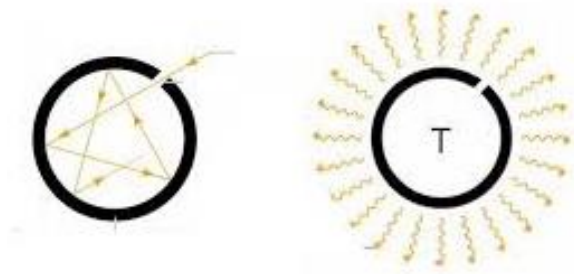
Un corpo solido emette, per effetto dell'agitazione termica degli atomi, una radiazione elettromagnetica, uniformemente distribuita in tutte le direzioni e non polarizzata, con uno spettro continuo che si estende, a temperature ordinarie, dalle microonde all'ultravioletto e la cui forma ha un aspetto caratteristico che dipende esclusivamente dalla temperatura.

Si definisce corpo nero un modello fisico di assorbitore ideale, in grado di captare ogni radiazione elettromagnetica incidente senza rifletterla né trasmetterla. In uno stato di equilibrio termico, affinché la sua temperatura rimanga costante (se ne emettesse di più, si raffredderebbe, e se ne emettesse di meno, si scalderebbe), il corpo nero restituisce all'ambiente una quantità di energia esattamente pari a quella assorbita. In virtù di questo bilancio energetico, esso rappresenta il anche l'emettitore più efficiente possibile a una determinata temperatura.

È importante specificare che l'energia emessa non è la stessa che ha ricevuto. Uno specchio restituisce esattamente tutta l'energia che riceve istantaneamente e con la stessa frequenza (riflessione). Invece un corpo nero assorbe la radiazione, la trasforma in agitazione termica dei suoi atomi e poi la riemette sotto forma di nuova radiazione (radiazione termica). La frequenza della radiazione emessa dipende solo dalla sua temperatura, non da quella della luce che ha assorbito.

Ribadiamolo: per un corpo nero ideale, la radiazione emessa non dipende affatto dalla natura del materiale (che sia ferro, carbone, platino o gas), né dalla sua forma o struttura superficiale. Essa dipende esclusivamente dalla sua temperatura assoluta.

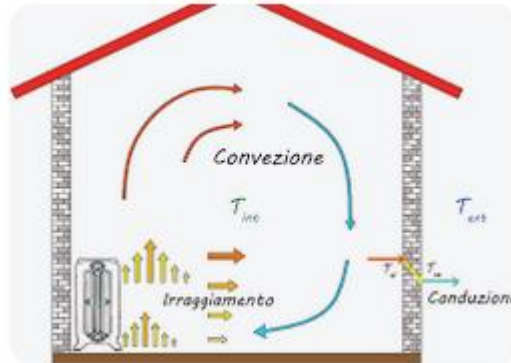
Questo concetto è formalizzato dalla *Legge di Kirchhoff*, la quale afferma che un buon assorbitore è anche un buon emettitore. Poiché il corpo nero è l'assorbitore ideale (assorbe tutto), è per definizione anche l'emettitore ideale.



Il corpo nero assorbe dunque tutta l'energia incidente e, per il principio di conservazione, re-irradia totalmente la quantità assorbita, dovendo quindi il suo nome unicamente all'assenza di riflessione; possiede perciò coefficiente di emissione uguale a quello di assorbimento e pari ad uno. I corpi reali invece si discostano più o meno sensibilmente da questa definizione e sono perciò detti corpi grigi. In altri termini si può dire che tutti i corpi reali si comportano più o meno come corpi neri a meno della loro riflettività e trasmittanza. Dal punto di vista visivo, un corpo nero può essere interpretato come una cavità dotata di un orificio che permette l'ingresso di radiazione elettromagnetica ma rende molto improbabile la sua uscita dallo stesso. Questo modello costituisce un'ottima approssimazione di corpo nero: basti pensare a un contenitore in cui sia stato fatto un piccolo foro: a temperatura ambiente il foro appare assolutamente nero, ed il motivo è che la radiazione luminosa che entra nel contenitore viene diffusa molte volte al suo interno, ed è molto più probabile che alla fine venga assorbita piuttosto che riesca ad uscire dallo stesso foro da cui è entrata. In questo modo la radiazione che entra nella cavità scalda le pareti, che riemettono principalmente, a temperatura ordinaria, radiazione infrarossa. Quando viene raggiunto l'equilibrio termodinamico l'energia elettromagnetica che entra nella cavità è uguale a quella irradiata dal foro, ma il tipo di radiazione emesso dipende dalla temperatura della cavità. Da questo punto di vista si capisce allora che un corpo nero non è veramente nero: un oggetto come quello descritto sopra ci appare nero a temperatura ambiente perché assorbe radiazione visibile, quest'ultima viene convertita in radiazione nel dominio dell'infrarosso (a temperature ordinarie), in seguito all'assorbimento e ri-emissione da parte delle pareti, tali radiazioni risultando non visibile dall'occhio umano ci fanno apparire il foro come nero. Per temperature inferiori a 1000 K, lo spettro è essenzialmente tutto nella regione dell'infrarosso, successivamente comincia a comparire il visibile, a partire dal rosso, per poi includere tutte le frequenze (del visibile) fino a far apparire il corpo di color bianco. Il filamento di una

# La trasmissione del calore

(e tempo di raffreddamento di una birra)



Il **calore** è una forma di **energia**, così come il **lavoro**, che si trasferisce tra due corpi o sistemi a causa di una differenza di temperatura. Questo trasferimento avviene sempre spontaneamente dal corpo più caldo (a temperatura più alta) verso il corpo più freddo (a temperatura più bassa), fino al raggiungimento di un equilibrio termico.

## Calore

Definizione: È l'energia che viene trasferita tra due corpi o sistemi a causa di una differenza di temperatura. Modalità di trasferimento: Avviene sempre da un sistema a temperatura più alta ad uno a temperatura più bassa, secondo il secondo principio della termodinamica.

Esempio: Riscaldare una pentola su un fornello. L'energia viene trasferita sotto forma di calore dal fornello (più caldo) alla pentola e successivamente al cibo al suo interno.

Effetto: Il trasferimento di calore aumenta o diminuisce l'energia interna del sistema, modificando spesso la sua temperatura o il suo stato (ad esempio, da solido a liquido).

Dipendenza: Si verifica solo se esiste una differenza di temperatura.

## Lavoro

Definizione: È l'energia trasferita al sistema dall'esterno dal sistema all'esterno attraverso forze meccaniche (movimento, compressione, espansione, ecc.).

Modalità di trasferimento: Avviene tramite l'azione di una forza.

Esempio: Sollevare un oggetto contro la forza di gravità, comprimere un gas in un cilindro mediante un pistone.

Effetto: Il lavoro può cambiare l'energia interna del sistema o produrre movimento (energia cinetica). Dipendenza: Richiede l'applicazione di una forza e uno spostamento.

La **trasmissione del calore** (o **scambio termico**) è un fenomeno di trasporto in cui è coinvolta energia termica tra due sistemi, che è causato da una differenza di temperatura tra i due sistemi, da quello caldo a quello freddo.

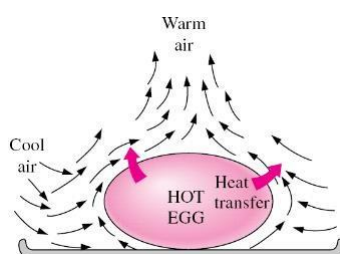
Lo studio dei fenomeni di trasmissione del calore riguarda tutti quei processi fisici nei quali una certa quantità di energia termica è trasferita da un sistema ad un altro a causa di una differenza di temperatura. Tali processi avvengono in accordo con i principi della termodinamica: quindi per il primo principio, l'energia termica ceduta da un sistema deve essere uguale a quella ricevuta dall'altro e il calore, come afferma il secondo principio, passa dal corpo più caldo a quello più freddo. Tuttavia tra termodinamica e trasmissione del calore c'è una fondamentale differenza. Infatti in ambito termodinamico è irrilevante il tempo necessario affinché un dato processo sia ultimato, in quanto ora, l'oggetto di studio della termodinamica sono i sistemi in equilibrio e le grandezze fisiche in gioco sono considerate indipendenti dal tempo. Nella trasmissione del calore, chiamata anche Termocinetica, ciò che conta è la rapidità in cui avviene il processo di scambio termico. Riveste quindi notevole importanza la quantità di calore scambiata nell'unità di tempo che prende il nome di potenza termica. Essa viene indicata con il simbolo  $Q$  o semplicemente  $P$  (dal contesto si capisce che questa potenza si riferisce a scambi termici) e poiché è una potenza, nel sistema internazionale si misura in watt. Riassumendo, lo scopo della Termocinetica è studiare la velocità di scambio del calore invece della quantità assoluta trasferita in un tempo infinito, come avviene in Termodinamica. La trasmissione del calore avviene spontaneamente solo da un corpo caldo ad un corpo freddo, fino a che i due corpi raggiungono la stessa temperatura, detta di equilibrio termico. Il corpo caldo comunica a quello freddo parte della sua energia termica intensificandone l'agitazione molecolare. La propagazione del calore può avvenire per conduzione, convezione o per irraggiamento.

### *Conduzione*



Il trasferimento per conduzione avviene tra corpi (solidi, liquidi o gas) che sono a contatto, o tra parti di uno stesso corpo che si trovano a temperature diverse. Esso è causato dal trasferimento di energia cinetica da una molecola a quella adiacente che possiede una velocità di vibrazione minore. Poiché la velocità di vibrazione delle particelle è direttamente proporzionale alla temperatura, il corpo caldo cede energia a quello freddo, aumentandone la temperatura, finché non è raggiunto l'equilibrio termico. Prendiamo ad esempio, come indicato in figura 1a, due corpi a temperature diverse. Una volta posti in contatto, per conduzione il calore fluisce dal corpo più caldo a quello più freddo, finché essi raggiungono una temperatura d'equilibrio

### Convezione



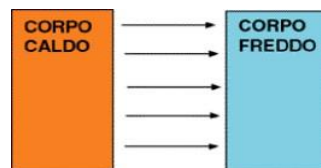
Il trasferimento di calore per convezione avviene in un fluido a causa del movimento macroscopico del fluido stesso quando esso è a contatto con un corpo (solido o fluido) a temperatura diversa. Ad esempio avviene dentro il fluido stesso (acqua che bolle) o tra una superficie solida e un fluido: (aria nei pressi di un radiatore).

Quando una porzione di fluido si riscalda (ad esempio, vicino a una superficie calda), si espande, riducendo la sua densità. La porzione più calda e meno densa del fluido tende a salire. La porzione più fredda, più densa, scende verso il basso per occupare lo spazio lasciato libero. Questo movimento crea un moto circolatorio nel fluido, chiamato moto convettivo. Tale processo continua finché esiste una differenza di temperatura. In questi casi le forze gravitazionali provocano quindi continui movimenti delle particelle del fluido, con conseguente miscelazione, favorendo pertanto la

trasmissione del calore dalle particelle più calde a quelle più fredde. Questo fenomeno prende il nome di convezione naturale.

Quando invece i movimenti delle particelle del fluido sono imposti essenzialmente da cause meccaniche (una pompa, nel caso di circolazione dell'acqua, o semplicemente l'azione del vento), il fenomeno prende il nome di convezione forzata.

### *Irraggiamento*



Nell'irraggiamento il calore viene scambiato mediante emissione e assorbimento di radiazione elettromagnetica (principalmente in ambito terrestre sotto forma di raggi infrarossi).

Emissione di radiazione: tutti i corpi con una temperatura superiore allo zero assoluto emettono energia sotto forma di onde elettromagnetiche. La quantità di radiazione emessa dipende dalla temperatura del corpo e dalla sua emissività (quanto bene un corpo emette radiazione, il corpo che emette più di tutti viene detto corpo nero ed ha una emissività pari ad uno, ossia emette tutta la radiazione che riceve).

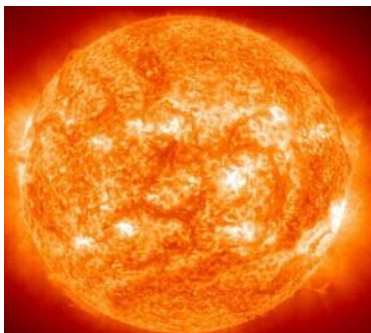
Trasferimento dell'energia: l'energia termica si propaga nello spazio sotto forma di radiazioni elettromagnetiche. Queste onde non richiedono un mezzo fisico per propagarsi, quindi l'irraggiamento avviene anche attraverso il vuoto.

Assorbimento: quando le onde elettromagnetiche incontrano un altro corpo, una parte dell'energia viene assorbita, trasformandosi in calore. La quantità assorbita dipende dalle proprietà del materiale (colore, struttura, emissività) e dall'intensità della radiazione.

Il calore così scambiato aumenta molto rapidamente con la differenza di temperatura. A differenza delle altre due modalità di scambio termico, l'irraggiamento non richiede la presenza di un mezzo perché vi sia trasmissione di energia. La radiazione elettromagnetica che opera da "trasmettitore" di calore, è generata dall'eccitazione termica della superficie del corpo, a sua volta causata dallo stato energetico degli atomi che la costituiscono, ed è emessa in tutte le direzioni.

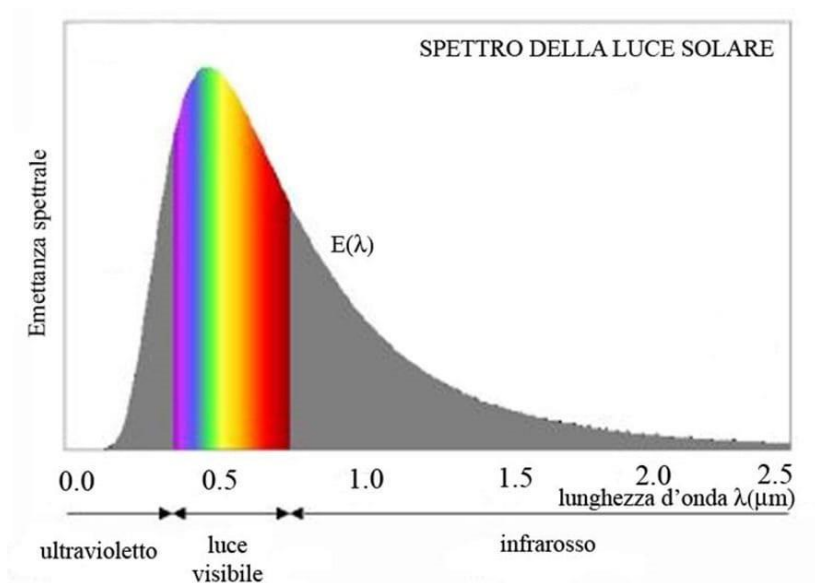
### **Resistenza termica**

## Il bilancio termico terrestre ed effetto serra



### Spettro di emissione del Sole

Il Sole emette su tutto lo spettro, dai raggi gamma alle onde radio, ma circa **il 99% della radiazione ha lunghezza d'onda compresa tra 0.15 e 4  $\mu\text{m}$**  con un massimo di intensità a circa 0.5  $\mu\text{m}$ .



La radiazione solare che raggiunge la superficie terrestre:

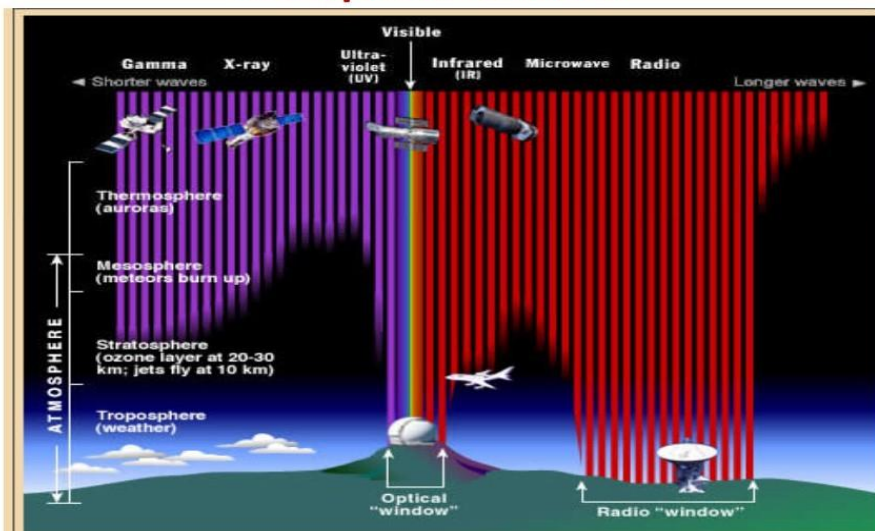
**10% - radiazione ultravioletta** (0.15  $\mu\text{m}$  ÷ 0.4  $\mu\text{m}$ )

**50% - radiazione visibile** (0.4  $\mu\text{m}$  ÷ 0.8  $\mu\text{m}$ )

**40% radiazione infrarossa** (0.8  $\mu\text{m}$  ÷ 4  $\mu\text{m}$ )

Nella seguente illustrazione viene mostrato quello che arriva al suolo della radiazione solare.

## Radiazione che arriva a terra: the optical window



Come si vede anche la banda delle microonde e onde radio arriva al suolo essendo l'atmosfera trasparente ad esse, ma le loro intensità sono di 6-7 ordini di grandezza inferiori alle intensità della radiazione ottica, e non sono neanche strumentalmente misurabili.

Per quanto riguarda le radiazioni a corta lunghezza d'onda ossia raggi gamma, raggi X e UV lontano (fra  $0.01 \mu\text{m}$  e  $0.2 \mu\text{m}$ ) emessi dal Sole essi vengono in larga parte assorbiti dall'atmosfera terrestre. La nostra atmosfera agisce come uno schermo naturale contro i raggi X e altre radiazioni ionizzanti provenienti dal Sole e dallo spazio. Questo fenomeno è dovuto alla capacità di assorbimento dei gas atmosferici. Gli strati superiori dell'atmosfera, come la ionosfera, assorbono i raggi X a bassa energia, ma la maggior parte dei raggi X, quelli ad alta energia, vengono assorbiti dalla troposfera, la parte più bassa dell'atmosfera. Tuttavia, alcune frazioni percentuali (trascurabili), di tale radiazione può raggiungere comunque la superficie terrestre, specialmente durante le eruzioni solari o altri eventi solari intensi.

Al limite esterno dell'atmosfera, su una superficie di  $1 \text{ cm}^2$ , posta perpendicolarmente alla direzione dei raggi solari, arrivano circa  $8.1 \text{ J/min}$ , questa quantità di energia non mostra significative variazioni nel tempo ed è chiamata costante solare (C):

$$C = 1367 \text{ W/m}^2$$

Quando la radiazione raggiunge l'atmosfera si possono verificare tre fenomeni.

- **Riflessione:** le radiazioni che arrivano sulle nubi e al suolo vengono riflesse senza perdere energia: circa il **30%** (indicativamente circa il 25% dall'atmosfera e 5% dal suolo).
- **Diffusione:** le radiazioni solari viaggiano in linea retta ma le molecole d'acqua e di aerosol le

diffondono in tutte le direzioni (il fenomeno della diffusione spiega ad esempio perché risultano illuminate anche zone che non ricevono direttamente la luce solare).

- **Assorbimento:** le radiazioni sono assorbite dalle molecole di alcuni gas e dalle nubi e dal suolo ed in parte vengono riemesse con lunghezza d'onda maggiore (infrarosso): circa il **70%** (20% dall'atmosfera e 50% dal suolo).

Il ritorno dell'energia nello spazio avviene perciò attraverso due modalità.

riflessione: le radiazioni sono respinte;

irraggiamento: le radiazioni (UV, visibile e IR) sono assorbite e poi riemesse nell'infrarosso.

Questi sono valori medi, perché la radiazione varia in funzione della latitudine, stagione, ora, presenza di nubi, ecc... La radiazione riflessa complessivamente dalla Terra (30%) costituisce l'albedo.

Osserviamo che le radiazioni assorbite riscaldano il sistema ad una certa temperatura di equilibrio  $T$ . Ricordiamo che un corpo, per il solo fatto che possiede una certa temperatura, emette radiazione (spesso chiamata radiazione termica) secondo la legge di Stefan-Boltzmann con un'intensità totale di emissione data dalla semplice relazione  $I = \sigma T^4$  ( $W/m^2$ ) dove  $\sigma$  è una costante (detta costante di Boltzmann). Notiamo inoltre che l'emissione della radiazione termica avviene non su una singola frequenza bensì su una banda di frequenze, come illustrato dalla figura iniziale dello spettro solare. Per calcolare lo spettro a partire dalla conoscenza della temperatura del corpo, dobbiamo usare la seguente formula di emissione di corpo nero di Plank:

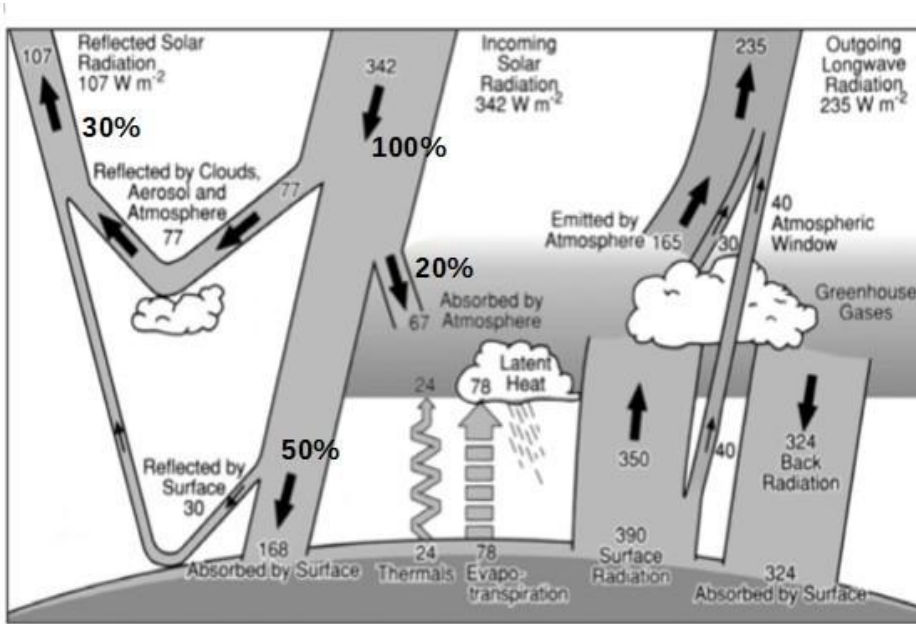
$$\varepsilon(\nu, T) = \frac{2 \cdot \pi \cdot h}{c^2} \cdot \frac{\nu^3}{\exp(h \cdot \nu / (k_B \cdot T)) - 1} (W/m^2)$$

dove  $\varepsilon$  è l'intensità specifica. Ora se si calcola  $\varepsilon$  per varie frequenze si vede che l'intensità della radiazione emessa dalla Terra (che ha una temperatura media di 15 °C), è praticamente tutta concentrata nell'infrarosso, tra 5 e 25  $\mu m$  con il massimo dell'emissione a 10  $\mu m$ . Questa radiazione non si disperde direttamente nello spazio ma va a riscaldare l'atmosfera dal basso la quale ne trattiene la maggior parte, circa il 90%, riemettendola in tutte le direzioni (effetto serra). Grazie a questo fenomeno la Terra ha una temperatura media di 15 °C anziché i -20 °C che avrebbe se non fosse presente l'atmosfera. Come mai allora la Terra non si riscalda con il passare del Tempo?

L'equilibrio termico della Terra è garantito da due distinti meccanismi non radiativi che trasferiscono l'energia dalla superficie terrestre all'atmosfera, che a sua volta la disperde nello spazio.

L'evapotraspirazione, cioè l'evaporazione di tutte le acque superficiali presenti sulla Terra (oceani, mari, laghi, ecc.) unita alla traspirazione delle piante, assorbe il 25% della radiazione solare. Questa energia poi si libera di nuovo come calore latente nei processi di condensazione del vapore acqueo atmosferico che avvengono in quota (nubi) o al suolo (nebbia, brina, rugiada). Il 5% dell'energia passa direttamente dal suolo o dal mare all'aria sovrastante, che per i moti di convezione si riscalda e sale in quota, disperdendo poi il calore nello spazio (calore sensibile). Se si sommano radiazione terrestre, calore latente e calore sensibile si ottiene un perfetto equilibrio tra energia in entrata ed energia in uscita dalla Terra: il bilancio energetico globale del nostro pianeta è nullo e quindi la Terra, nel complesso, non si riscalda né si raffredda. Questo però non vale se si considerano brevi periodi di tempo o zone limitate di superficie terrestre: in questo caso il bilancio energetico può essere negativo o positivo.

La seguente illustrazione mostra il bilancio radiativo fra la radiazione solare e la Terra.



## Bilancio radiativo

Abbiamo visto che l'intensità media della radiazione solare al top dell'atmosfera è di 342 W/m<sup>2</sup>, allora si ha:

$$I_{0,ave} = I_{riflessa} + I_{assorbita,atm} + I_{assorbita,superficie}$$

Ed i loro valori numerici, in W/m<sup>2</sup> sono (come noto dai dati sperimentali):

342 (rad. incidente media al top dell'atmosfera) = 107 (riflessa) + 67 (ass atm) + 168 (ass. sup.), arrotondando le percentuali possiamo scrivere,

$I_{riflessa} = 30\% (107 \text{ W/m}^2)$
$I_{ass\ atm} = 20\% (67 \text{ W/m}^2)$
$I_{ass\ sup} = 50\% (168 \text{ W/m}^2)$

Se ora calcoliamo l'intensità di emissione della Terra (avente temperatura media di 15°C ≡ 288 K) ci accorgiamo che essa è maggiore dell'intensità in entrata (342 W/m<sup>2</sup>), infatti si ha

$$I_{terra} = \sigma \cdot T^4 = 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot 288^4 = 390 > 342 \text{ (W/m}^2\text{)}$$

Dunque ci deve essere un'altra sorgente di radiazione diretta verso la superficie, altrimenti in questo modo la Terra si raffredderebbe immediatamente, essa è data dalla radiazione infrarossa emessa dall'atmosfera verso la superficie, pari a 324 W/m<sup>2</sup> (valore sperimentale), questo è il cosiddetto "effetto serra", esso consiste dunque al fatto che l'atmosfera non lascia passare tutta la radiazione proveniente dalla superficie terrestre ma solo una parte, circa il 10%, mentre il restante 90% circa viene assorbito (circa 350 W/m<sup>2</sup>), assorbendo questa radiazione l'atmosfera si riscalda e riemette radiazione infrarossa suddivisa in due flussi, 324 W/m<sup>2</sup> verso la superficie e circa 40 W/m<sup>2</sup> in uscita verso lo spazio.

Calcoliamo il bilancio per quanto riguarda la superficie terrestre:

rad. Solare + rad infrarossa dall'atmosfera – rad. termica emessa

$$168 + 134 - 390 = 102 \text{ (W/m}^2\text{)}$$

Dunque la Terra mediamente sembrerebbe avere un surplus di energia radiante pari a 102 W/m<sup>2</sup>, che deve perdere in qualche modo altrimenti si riscalderebbe.

Passiamo ora all'atmosfera: in ingresso si hanno i 67 W/m<sup>2</sup> della radiazione solare, dei 390 W/m<sup>2</sup> della superficie terrestre 350 W/m<sup>2</sup> vengono assorbiti (cioè il 90%), gli altri 40 W/m<sup>2</sup> sono dispersi nello spazio attraverso la finestra atmosferica. In uscita invece si ha che l'atmosfera emette radiazione infrarossa per 324 W/m<sup>2</sup> verso la superficie e 195 W/m<sup>2</sup> verso lo spazio, suddivisi in 165 emessi da atmosfera libera e 30 emessi da nubi. In breve abbiamo:

# Bilancio Energetico del Corpo Umano

Analisi quantitativa del Metabolismo e della Termoregolazione



---

## Indice

1. Introduzione
  2. Principi Fondamentali
  3. Metabolismo Basale e Totale
  4. Apporti Energetici
  5. Dispendio Energetico
  6. Termoregolazione
  7. Bilancio Energetico e Peso Corporeo
  8. Fattori che Influenzano il Bilancio
  9. Conclusioni
-

## Introduzione

Il corpo umano è un sistema complesso che, come ogni sistema meccanico, ha bisogno di energia per funzionare. Questa energia proviene principalmente dai cibi che ingeriamo e viene spesa attraverso una serie di processi fisiologici e attività quotidiane. Comprendere il bilancio energetico è fondamentale per mantenere uno stato di salute ottimale e prevenire malattie legate a squilibri energetici, come obesità o malnutrizione.

Il bilancio energetico rappresenta la differenza tra l'energia introdotta con l'alimentazione e quella consumata dall'organismo. Un bilancio positivo (apporto calorico superiore al consumo) determina un aumento di peso, mentre un bilancio negativo (consumo superiore all'apporto) ne comporta la perdita. Un equilibrio tra questi due fattori permette, invece, il mantenimento del peso corporeo nel tempo.

Questo principio rappresenta uno dei pilastri della fisiologia umana e costituisce la base per comprendere i meccanismi che regolano la composizione corporea, la performance fisica e la salute metabolica. In quanto sistema termodinamico aperto, il corpo umano scambia costantemente materia ed energia con l'ambiente: l'energia introdotta viene utilizzata per sostenere le funzioni vitali, alimentare l'attività fisica e regolare la temperatura corporea.

La comprensione quantitativa di questi processi è essenziale non solo in ambito teorico, ma anche per applicazioni pratiche in campo clinico e sportivo. La capacità di calcolare con precisione il fabbisogno individuale e di prevedere le variazioni ponderali in risposta a modifiche dell'apporto calorico o dell'attività fisica è uno strumento indispensabile per la gestione della salute.

L'energia è necessaria non solo durante l'esercizio, ma anche in condizioni di assoluto riposo. A seconda dello stile di vita, tra il 50% e l'80% del dispendio energetico giornaliero è destinato al metabolismo basale, che garantisce le funzioni vitali (respirazione, circolazione, termoregolazione) e i processi biosintetici. Anche la digestione richiede energia, un fenomeno noto come effetto termico del cibo, che incide per circa il 10% sul totale. Infine, la componente più variabile è l'attività fisica, che include sia l'esercizio strutturato sia i movimenti involontari (come la postura); questa quota può variare dal 20% in soggetti sedentari fino a oltre il 40% in individui estremamente attivi.

# Principi Fondamentali

## Prima Legge della Termodinamica

Il Primo Principio della Termodinamica costituisce la formulazione estesa del principio di conservazione dell'energia ai sistemi termodinamici. Da un punto di vista assiomatico, esso stabilisce che l'energia di un sistema isolato si conserva e che, in sistemi non isolati, l'energia può essere scambiata con l'ambiente esclusivamente sotto forma di calore ( $Q$ ) e lavoro ( $L$ ).

Il fulcro del principio risiede nell'introduzione di una funzione di stato definita Energia Interna ( $U$ ). Essa rappresenta la somma di tutte le energie microscopiche del sistema (energia cinetica traslazionale, rotazionale e vibrazionale delle molecole, nonché l'energia potenziale derivante dalle interazioni intermolecolari e dai legami chimici).

La variazione di energia interna ( $\Delta U$ ) durante una trasformazione termodinamica è espressa dall'equazione:

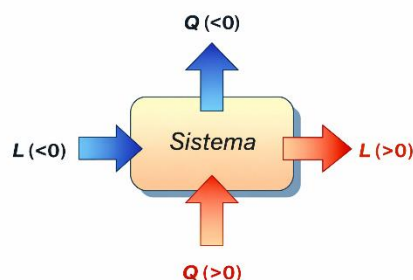
$$\Delta U = Q - L \quad (1)$$

Questa equazione implica due concetti fondamentali:

L'energia interna è una funzione di stato: la sua variazione dipende esclusivamente dallo stato iniziale e finale del sistema, e non dal percorso seguito dalla trasformazione.

Equivalenza tra Calore e Lavoro. Il calore e il lavoro non sono proprietà del sistema, ma "energia in transito". Essi sono le modalità attraverso cui un sistema scambia energia con l'esterno per modificare il proprio stato energetico interno.

Convenzione dei segni: secondo la convenzione standard (Clausius), il calore  $Q$  è considerato positivo quando è assorbito dal sistema, mentre il lavoro  $L$  è positivo quando è compiuto dal sistema sull'ambiente.



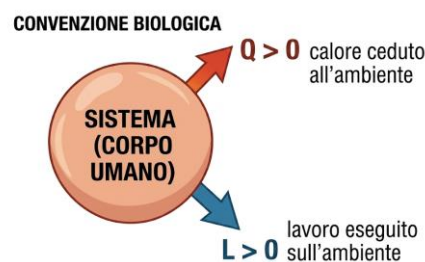
- $Q$  è il calore assorbito dal sistema (positivo se entra, negativo se esce)
- $L$  è il lavoro compiuto dal sistema (positivo se esce, negativo se entra).

Mentre in un sistema meccanico ideale l'energia si conserva sotto forma di energia meccanica (cinetica + potenziale), il Primo Principio generalizza questa conservazione includendo i trasferimenti termici, rendendolo una legge universale applicabile a ogni processo naturale, dai motori termici alle reazioni biochimiche nei sistemi complessi.

## Inquadramento Termodinamico

Il corpo umano può essere definito, in termini termodinamici, come un sistema aperto che opera in uno stato di non-equilibrio stazionario. Esso scambia continuamente materia ed energia con l'ambiente circostante per mantenere la propria integrità strutturale e funzionale (omeostasi = mantenimento di un equilibrio interno stabile).

Per discutere gli aspetti biologici di un sistema assumeremo una convenzione diversa da quella di Clausius, e precisamente assumeremo che il calore sia definito positivo se prodotto dal corpo ed il lavoro venga considerato positivo se il corpo compie lavoro verso l'ambiente.



Partiamo dalla seguente relazione generale:

$$\frac{dU}{dt} = \dot{E}_{in} - \dot{E}_{out}$$

che esprime la variazione istantanea dell'energia interna ( $U$ ) nel tempo ( $t$ ). Essa dice semplicemente che la velocità con cui l'energia cambia è data dalla differenza tra la potenza entrante ( $\dot{E}_{in}$ ) e quella uscente ( $\dot{E}_{out}$ ). Integrando l'espressione precedente si ha:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dU}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} (\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out}) dt$$

$\dot{E}_{out}$  (Energia in uscita). Secondo la nostra convenzione, sia il calore che il lavoro sono positivi se escono. Quindi la potenza totale in uscita è la somma delle potenze termiche e meccaniche uscenti:

$$\dot{E}_{out} = \dot{Q} + \dot{L}$$

$\dot{E}_{in}$  (Energia in entrata). E' la potenza in entrata Rappresenta l'energia contenuta nei nutrienti (metabolismo).

$$\frac{dU}{dt} = \dot{E}_{in} - (\dot{Q} + \dot{L})$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dU}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} (\dot{E}_{in} - (\dot{Q} + \dot{L})) dt$$